©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at


# Beitrag zur Theorie der Regelflächen vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt.

Von **Adolf Ameseder.**

Art. 1. Eine Ebene $E$ schneidet eine Tangentenebeneninvolution $J_2$ zweiter Classe, mit einem Trägerkegel zweiten Grades $K^2$, in einer Tangenteninvolution $i_2$, welche auch von der zweiten Classe ist und den Schnitt $(K_2E)$ ihrer Ebene mit dem Kegel $K^2$ zum Träger hat. Da nun nach der Abhandlung: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ [1] das Erzeugniss einer Tangenteninvolution $i_2$ und eines eindeutigen Strahlbüschels $\delta$ eine ebene, rationale Curve vierter Ordnung $C_6^4$ ist; so erkennen wir das von $J_2$ und einem eindeutigen Ebenenbüschel $\Delta$ erzeugte Gebilde als Regelfläche vierten Grades $F^4$, vorausgesetzt, dass die Axe von $\Delta$ eine allgemeine Stellung gegen $K^2$ hat. Die Gerade $\Delta$ ist die Doppelgerade der Fläche, weil ihr Schnitt $\delta$ mit der Ebene $E$, als Scheitel des gleichnamigen Strahlbüschels ein Doppelpunkt von $C_6^4$ ist.

Die Curve $C_6^4$ hat zwei weitere Doppelpunkte, deren geometrischer Ort demnach ein Kegelschnitt ist, welcher, da je zwei in einer Ebene des Büschels $\Delta$ liegende Erzeugende von $F^4$ sich in einem Punkte der Involutionsebene schneiden, als Ort dieses Punktes, selbst in der bezeichneten Ebene liegt.

Jene zwei Erzeugenden $e'$, $e''$ der $F^4$, welche sich in einer Ebene von $\Delta$ befinden, erhalten wir, in Folge der Definition der Fläche, als die Schnitte dieser Ebene mit dem ihr entsprechenden, conjugirten Ebenenpaar von $J_2$. In jener Ebene $\varepsilon_0$, welche die Spitze des Kegels $K^2$ enthält, liegen auch zwei Erzeugende; diese schneiden sich, nach dem Gesagten, in $O$; dieser Punkt gehört also auch dem Doppelkegelschnitt $D$ an.

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissenschaften zu Wien, Jännerheft 1879.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die Doppelgerade $\Delta$ hat mit $D$ einen Punkt $B$ gemein, weil jede Ebene $\varepsilon$ von $\Delta$ als Trägerin von nur zwei Erzeugenden $e'$, $e''$ auch nur einen nicht auf $\Delta$ gelegenen Punkt von $D$, nämlich den Schnittpunkt $(e', e'')$ besitzt.

„Das Erzeugniss eines eindeutigen Ebenenbüschels $\Delta$ und einer Tangentenebeneninvolution zweiter Classe $J_2$, auf einem Kegel zweiten Grades $K^2$, ist eine Regelfläche vierten Grades, welche die Axe $\Delta$ des gleichnamigen Ebenenbüschels und einen in der Involutionsebene $\varepsilon_i$ liegenden Kegelschnitt $D$, der die Spitze $O$ des Kegels $K^2$ enthält und $\Delta$ einmal schneidet, zu Doppelcurven hat."

Die in der Ebene $\varepsilon$ befindlichen Erzeugenden begegnen $\Delta$ in zwei Punkten $\alpha'$ und $\alpha''$, welche die Berührungspunkte der Ebene mit $F^4$ sind; die bezeichnete Ebene ist daher eine Doppeltangentenebene der Fläche. Da man umgekehrt aus einem Punkt $\alpha'$ von $\Delta$ zwei (nicht ein conjugirtes Paar von $J_2$ bildende) Tangentialebenen $\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2''$ an $K^2$ legen kann, und diesen zwei verschiedene Ebenen $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ im Büschel $\Delta$ entsprechen, schneiden sich in $\alpha'$ zwei Erzeugende $e_1' = (\varepsilon', \varepsilon_1')$ und $e_1'' = (\varepsilon'', \varepsilon_2'')$ der Fläche, welche mit $\Delta$ die zwei an $F^4$ in $\alpha'$ zu legenden Tangentialebenen $\varepsilon'$ und $\varepsilon''$ fixiren. Jede dieser Ebenen tangirt $F^4$ noch in einem Punkte $\alpha_1'$, respective $\alpha_1''$, welche Punkte, bei Drehung von $\varepsilon$, eine mit $\alpha'$ zwei zweideutige, coaxiale Reihe constituiren. In derselben Beziehung stehen auch die Ebenenbüschel $\Delta(\varepsilon')$ und $\Delta(\varepsilon'')$. Um die zwei in einem Punkt $\beta$ von $D$ sich begegnenden Erzeugenden $e'$, $e''$ zu erhalten, legen wir durch ihn und $\Delta$ die Ebene $\varepsilon$ und an $K^2$ die zwei möglichen Tangentialebenen $\varepsilon'$, $\varepsilon''$. Diese schneiden $\varepsilon$ in den gesuchten Geraden. Wenden wir dieses Verfahren an dem $\Delta$ und $D$ gemeinschaftlichen Punkt $B$ an, so finden wir, dass jene zwei Erzeugenden $e_B'$, $e_B''$, welche durch $B$ laufen in derselben, $D$ in $B$ berührenden Ebene $\varepsilon_B$ des Büschels $\Delta$ liegen.[1] Diese ist daher die einzige $F^4$ in $B$ tangirende Ebene, sie berührt auch die Regelfläche an keiner andern Stelle. Der Punkt $B$ ist ein Berührungsknoten der Fläche und ein dreifacher Punkt der

[1] $\beta$ liegt in diesem Falle unendlich nahe zu $B$. Auch bilden die zwei aus $B$ an $K^2$ gelegten Tangentenebenen ein conjugirtes Paar, so dass schon desshalb $e_B'$, $e_B''$ mit $\Delta$ in einer Ebene sich befinden müssen.

Reihen $(\alpha')$ und $(\alpha'')$, sowie $\varepsilon_B$ eine dreifache Ebene der conjectivischen Büschel $(\varepsilon')$ und $(\varepsilon'')$ ist.

Aus der angegebenen Construction erhellt auch, dass wenn $\beta$ bei seiner Bewegung auf $D$ mit einem der zwei (von $O$ verschiedenen) Schnittpunkte $c_1$, $c_2$ dieses Kegelschnittes mit $K^2$ coincidirt, die Erzeugenden $e'$, $e''$ unendlich nahe rückend, eine singuläre Erzeugende $e_1$ oder $e_2$ von $F^4$ bilden. Sie sind die Schnittlinien der Ebenen $(\Delta c_1) = v_1$ und $(\Delta c_2) = v_2$ mit den $K^2$ längs $\overline{oc_1}$ beziehungsweise $\overline{oc_2}$ tangirenden Doppelebenen $\delta_1$, $\delta_2$ der Involution $J_2$. Sie haben die Eigenschaft, dass die Fläche in allen ihren Punkten von denselben Ebenen — den Cuspidalebenen $v_1$, respective $v_2$ berührt wird, und fixiren auf $\Delta$ die zwei Doppelpunkte $d_1$, $d_2$ der zweideutigen Reihen $(\alpha', \alpha'')$.[1]

Gleichzeitig mit den Erzeugenden $e'$, $e''$ fallen auch die durch sie und die Tangente $t$ von $D$ in $\beta$ bestimmten Tangentialebenen $\tau'$, $\tau''$ in $\beta$ zusammen, so dass sich $F^4$ in den Punkten $c_1$ und $c_2$ selbst berührt, während sie sich in einem andern Punkt von $D$ durchschneidet. Diese Eigenschaft lässt uns, in Verbindung mit der Thatsache, dass jede Gerade $g$ des Bündels $c$ ($c_1$ oder $c_2$) die Fläche in diesem Punkte berührt, in $c_1$ und $c_2$ Cuspidalpunkte der Fläche erkennen. Jede durch $e_1$ gelegte Ebene hat auch $c_1$ zum Berührungspunkt, da die zwei benachbarten Erzeugenden, aus welchen $e_1$ besteht, sich in dem genannten Punkt durchschneiden. Unter allen diesen Ebenen nimmt ausser $v_1$ jene Ebene $\tau_1$ eine ausgezeichnete Stellung ein, welche die Tangente $T_1$ von $D$ in $c_1$ enthält, und längs welcher (um $c_1$ herum) sich die Fläche berührt. Jeder Strahl des durch sie und $c_1$ festgestellten Büschels hat mit $F^4$ drei unendlich nahe in $c_1$ befindliche Punkte gemein.

Diesem reciprok sind die Eigenschaften der Cuspidalebene $v_1$ (dasselbe gilt von $v_2$); sie berührt $F^4$ längs der ganzen Ausdehnung von $c_1$ und bestimmt mit dem $c_1$ entsprechenden Doppelpunkt $d_1$ von $\Delta$ $(\alpha', \alpha'')$ ein Strahlbüschel, dessen jeder Strahl die Fläche $F^4$ in vier in $d_1$ vereinigten Punkten trifft. Wir nennen $d_1$ und ebenso $d_2$, aus diesem Grunde, Inflexionspunkte der

[1] Im Allgemeinen haben zwei zweideutige, coaxiale Reihen vier Doppelpunkte. Im vorliegenden Fall coincidiren zwei mit $B$ einen dreifachen Punkt bildend.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fläche; sie sind es für jede durch sie gehende, $F^4$ eingeschriebene, ebene Curve.

Durch dieselben Schlüsse gelangen wir zu dem Ergebniss, dass auch die Schnittpunkte $c_I$, $c_{II}$ der Doppelgeraden $\Delta$ mit dem Trägerkegel $K^2$ Cuspidalpunkte sind. Die durch sie gehenden singulären Erzeugenden $e_I$, $e_{II}$ berühren — sowie $e_1$, $e_2$ — in ihnen den Kegel $K^2$ und schneiden $D$ in $d_I$, beziehungsweise $d_{II}$, den Doppelpunkten der durch die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}''$, auf diesem Kegelschnitt bestimmten, zweideutigen Punktsystemen $(\beta')$ und $(\beta_1')$. Die singuläre Erzeugende $e_I$ fixirt mit der Tangente $T_I$ von $D$ in $c_I$ die Cuspidalebene $\varepsilon_I$ und mit $\Delta$ eine Doppelebene $\varepsilon_I$ dieses Büschels; und zwar jene, an welche sich $F^4$ im Punkte $c_I$ anschmiegt. Die Ebene $\varepsilon_I$ schneidet — wie jede andere, durch zwei in einem Punkt von $\Delta$ sich treffende Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ gegebene Ebene — die Regelfläche $F^4$ in einem eigentlichen Kegelschnitt $C_I^2$, der $T_I$ in $d_I$ berührt und dessen zweiter Schnitt $j_I$ mit $e_I$ auch ein Inflexionspunkt der Fläche ist.

„Die Regelfläche $F^4$ hat vier Cuspidalpunkte und einen Berührungsknoten. Dieser ist der beiden Doppellinien gemeinschaftliche Punkt; jene sind die Schnittpunkte der Doppellinien mit dem Trägerkegel."

Art. 2. Durch irgend einen Punkt $\alpha$ von $\Delta$ kann man nur eine Ebene $E_\alpha$ legen, welche $F^4$ nach einem eigentlichen Kegelschnitt $C^2$ schneidet. Es ist dies die, durch die sich in $\alpha$ schneidenden Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ bestimmte Ebene.[1]

Wir gehen nun daran, die von diesen Ebenen umhüllte Fläche zu untersuchen.

Die von einem Punkt $\beta_1'$ von $D$ ausgehenden Erzeugenden $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2$ liefern, mit $\Delta$ zum Schnitt gebracht, ein Punktepaar $\alpha_1'$, $\alpha_2'$ der Reihe $\Delta$ $(\alpha)$. Durch jeden der letztgenannten Punkte läuft, ausser $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$, noch je eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1''$, beziehungsweise $\mathfrak{e}_2''$. Diese beiden sind jedoch windschief und schneiden also $D$ in zwei verschiedenen Punkten $\beta_1''$ und $\beta_2''$. Wären diese Punkte, für jede Lage des Punktes $\beta_1'$, identisch, so müssten die durch $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ bestimmten zwei Ebenen der Involution $J_2$, jene Ebene $\varepsilon_0$ von $\Delta$, welche

[1] Siehe Art. 11, l. c.

den Punkt $O$ enthält in zwei derartig liegenden Geraden $g_1'$, $g_2'$ treffen, dass die durch diese an $K^2$ gelegten zweiten Tangentialebenen sich in einer in der Involutionsebene $\varepsilon_i$ befindlichen Geraden schneiden. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die Ebenen $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_i$ bezüglich $K^2$ conjugirt sind.[1]

Durchläuft $\beta_1'$ den Doppelkegelschnitt $D$, so beschreiben die Punkte $\beta_1''$, $\beta_2''$ ein mit $(\beta_1')$ zweideutig verwandtes Punktsystem $(\beta'')$; während die Verbindungsgeraden $m_1''=\overline{\beta_1'\beta_1''}$ und $m_1''=\overline{\beta_1'\beta_2''}$ eine Curve $C_0$, das Erzeugniss von $(\beta')$ und $(\beta'')$ umhüllen. Diese Enveloppe, welche die Schnittcurve der zu discutirenden Fläche und der Involutionsebene $\varepsilon_i$ ist, berührt den Kegelschnitt $D$ in $B$, nachdem dieser Punkt, als dreifacher Punkt der erzeugenden Reihen, der Schnittpunkt zweier benachbarter, sich in $B$ schneidender und mit der Tangente $T$ von $D$ in $B$ coincidirender Lagen der Umhüllenden $m''$ ist. Die durch den Cuspidalpunkt $c_1$ gehende singuläre Erzeugende $e_1$ schneidet $\Delta$ in $d_1$, einem Doppelpunkt der Reihe $\Delta(\alpha)$, durch welchen noch eine Erzeugende $\mathfrak{e}_1$, die $D$ in $\delta_1$ trifft, läuft. Der letztere Punkt ist in der Reihe $(\beta'')$ allein dem Punkte $c_1$ zugeordnet; er ist ein Doppelpunkt derselben, wogegen $c_1$ der ihm entsprechende Verzweigungspunkt der andern ist, und mit ihm verbunden die Tangente $\overline{c_1\delta_1}$ von $c_0$ in $c_1$ gibt. Die Schnittlinien der Cuspidalebenen $v_\mathrm{I}$, $v_\mathrm{II}$ und der Ebene $\varepsilon_i$ sind die $D$ und $C_0$ gemeinschaftlichen Tangenten, weil diese $D$ in $d_\mathrm{I}$ respective $d_\mathrm{II}$ tangiren und da $v_\mathrm{I}$ und $v_\mathrm{II}$ auch $F^4$ nach Kegelschnitten schneiden, zugleich Erzeugende von $C_0$ sind.

Die Curve $C_0$ hat also mit $D$ vier Punkte ($c_1$, $c_2$, $B$) und vier Tangenten ($T$, $(v_\mathrm{I}\varepsilon_i)$, $(v_\mathrm{II}\varepsilon_i)$) gemein und aus jedem Punkte von $D$ sind nur zwei Tangenten an sie möglich — sie ist ein Kegelschnitt $C_0^2$.

Eine Ebene $E_c$ schneidet $\Delta$ in einem Punkte $d'$ und berührt $C_0^2$ in einem Punkt $a'$. Diese Punkte beschreiben, wenn $E_c$ nach einander alle möglichen Lagen einnimmt, zwei projectivische Systeme $\Delta(\alpha')$ und $C_0^2(a')$, welche den Punkt $B$ entsprechend gemein haben, und daher ein einschaliges Hyperboloid $H^2$ erzeugen.[2]

---

[1] Die durch diese specielle Annahme bedingte Fläche besprechen wir in einem folgenden Aufsatz.

[2] Zwei projectivische Punktsysteme auf einer Geraden und einem Kegelschnitt erzeugen im Allgemeinen eine Caylaysche Regelfläche dritten

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Das Hyperboloid $H^2$ hat mit $F^4$ ausser $\Delta$ die singulären Erzeugenden $e_1$, $e_2$ gemein da den Cuspidalpunkten $c_1$, $c_2$, man möge sie als Elemente von $D(\beta')$ oder $C_0^2(a')$ ansehen, in $\Delta(\alpha')$ immer dieselben Punkte $d_1$ beziehungsweise $_2$ beigeordnet sind. Es berührt die Regelfläche im Berührungsknoten $B$ und wird von der Gesammtheit der Ebenen $E_c$ — da jede eine Tangente des Kegelschnittes $C_0^2$ und die durch ihren Berührungspunkt $a'$ laufende Erzeugende $\overline{a'\alpha'}$ enthält — längs des Kegelschnittes $C_0^2$ berührt. Die von den $E_c$ umhüllte Fläche ist daher der $H^2$ aus dem Schnittpunkt der Ebene $\varepsilon_B$, $v_\text{I}$ und $v_\text{II}$ umschriebene Kegel $\mathfrak{K}^2$, dessen Spitze $\mathfrak{P}$ der auf $H^2$ bezogene Pol von $\varepsilon_i$ ist.

„Alle Ebenen, welche die Regelfläche $F^4$ nach eigentlichen Kegelschnitten schneiden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades $\mathfrak{K}^2$, welcher den Schnitt der Cuspidalebenen $v_\text{I}$, $v_\text{II}$ mit der Tangentialebene $\varepsilon_B$, von $F^4$ im Berührungsknoten, zur Spitze hat, diese Ebenen berührt und die Cuspitalpunkte $c_1$, $c_2$, sowie den Berührungsknoten enthält."

Wie erwähnt, liegen in einer Tangentialebene $E_c$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$ zwei Erzeugende $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ von $F^4$, welche die Berührungskante $g_1$, von $E_c$ mit $\mathfrak{K}^2$, in zwei Punkten $n_1$, $n_2$ treffen. Die $E_c$ benachbarte Tangentenebene $E_c'$ enthält auch die $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$ benachbarten Erzeugenden $\mathfrak{e}''$, $\mathfrak{e}_1''$ der Regelfläche; ihre Schnittlinie $g_1$ mit der ersten bestimmt demnach auf $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, die Berührungspunkte der Doppeltangentenebene $E_c$ von $F^4$ mit dieser Fläche. Diese Punkte sind daher mit $n_1$, $n_2$ und zugleich mit den zweiten Schnittpunkten, des in der Ebene $E_c$ liegenden Kegelschnittes $C^2$ und den Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, identisch; während die ersten Schnittpunkte $\beta'$, $\beta_1'$ sich auf dem Doppelkegelschnitt $D$ befinden.

„Die Verbindungslinien der Berührungspunkte, der dem Büschel $\Delta$ nicht angehörigen Doppeltangentenebenen der Regelfläche $F^4$, erfüllen den von diesen Ebenen umhüllten Kegel $\mathfrak{K}^2$."

---

Grades [siehe pag. 109 in Em. Weyr's: „Geometrie der räum. Erzeugnisse ein- bis zweideutiger Gebilde", Leipzig, Teubner 1870]; wenn hingegen der den Träger gem. Punkt sich selbst entspricht, wie leicht einzusehen, ein Hyperboloid.

Der geometrische Ort der Punkte $n_1$, $n_2$ ist die Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$ mit der Regelfläche; er ist von der vierten Ordnung, da auf jeder Erzeugenden von $\mathfrak{K}^2$ zwei seiner Punkte liegen und die Spitze $\mathfrak{P}$ kein Punkt von $F^4$ ist. Dies erhellt übrigens schon aus der Bemerkung, dass, weil im Gesammtschnitt zweier Flächen ($F^4$ und $\mathfrak{K}^2$) jeder Berührungspunkt doppelt zu zählen ist, die Ordnungszahl desselben im vorliegenden Fall, da sich beide Flächen in allen Punkten berühren, auf die Hälfte (d. h. von 8 auf 4) reducirt wird. Der Kegel $\mathfrak{K}^2$ kann auch als der $F^4$ aus $\mathfrak{P}$ umschriebene Kegel angesehen werden; er ist der einzige Kegel zweiten Grades genannter Art, dessen Spitze sich nicht auf $D$ befindet, sowie $D$ der einzige $F^4$ eingeschriebene Kegelschnitt ist, dessen Ebene $\mathfrak{K}^2$ nicht berührt. Beide Gebilde sind in ihren Beziehungen zu $F^4$ reciprok, so dass $\mathfrak{K}^2$ auch mit dem Namen Doppeltangentenebenen-Kegel belegt werden kann.

Nimmt $E_c$, bei seiner Bewegung um $\mathfrak{K}^2$, die Lage der Ebene $v_\mathrm{I}$ ein, so werden auch die Erzeugenden $e'$, $e'_1$ unendlich nahe rückend mit der singulären Erzeugenden $e_\mathrm{I}$ zusammenfallen, und daher eine, in der Richtung der Berührungskante $g_\mathrm{I}$, von $v_\mathrm{I}$ mit $\mathfrak{K}^2$, erfolgende Coincidenz der Punkte $n_1$, $n_2$ mit $(e_\mathrm{I} g_\mathrm{I}) = j_\mathrm{I}$ bedingen. Die Geraden $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$ sind die aus $\mathfrak{P}$ an $\mathfrak{B}^4$ zu legenden Tangenten; $\mathfrak{B}^4$ selbst ist daher vom sechsten Rang; da durch jede Gerade $G$ des Bündels $\mathfrak{P}$ zwei Tangentialebenen $\varepsilon'_c$, $\varepsilon''_c$ an $\mathfrak{K}^2$ möglich sind und jede zwei Tangenten $\tau'_1$, $\tau'_2$ respective $\tau''_1$, $\tau''_2$ von $\mathfrak{B}^4$ enthält; $G$ demnach im Ganzen von sechs Tangenten der Curve getroffen wird.[1] Die Curve $\mathfrak{B}^4$ hat ferner $B$ zum Doppelpunkt, nachdem die auch dem Systeme $E_c$ angehörige Ebene $\varepsilon_B = (e'_B e''_B)$ die Fläche nur in $B$ tangirt, die zwei Punkte $n_1$, $n_2$ daher in $B$, den Schnittpunkt der zwei getrennten Erzeugenden $e'_B$ und $e''_B$, zu liegen kommen. Sie ist vom Geschlechte Null und der vollständige Durchschnitt des ihr aus $B$ umschriebenen Kegels ($k^2$) mit $\mathfrak{K}^2$.

---

[1] Die vier Schnittpunkte $p'_1$, $p'_2$, $p''_1$, $p''_2$ der Geraden $G$ mit den vier Tangenten beschreiben, wenn $G$ irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ des Bündels $\mathfrak{P}$ erfüllt, eine Curve $C^6$, sechster Ordnung, die $\mathfrak{P}$ zum Doppelpunkt (wegen $g_\mathrm{I}$, $g_\mathrm{II}$) hat, und der Schnitt von $\mathfrak{E}$ mit den von den Tangenten der Curve $\mathfrak{B}^4$ gebildeten developpablen Fläche $f^6$, sechster Ordnung, ist.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wie aus dem vorhergehenden Artikel hervorgeht, berührt jede durch eine singuläre Erzeugende, so $e_1$, gelegte Ebene, also auch $E_c' = (e_1 \mathfrak{e}_1)$, die Regelfläche in dem entsprechenden Cuspidalpunkt $c_1$. Dieser gehört daher auch der Curve $\mathfrak{B}^4$ an, und zwar hat diese in ihm die Ebenen $(e_1 \mathfrak{P})$ und $(\Delta e_1)$ zu Tangentenebenen, also $e_1$ selbst zur Tangente. Dass auch $(\Delta e_1)$ die Curve $\mathfrak{B}^4$ berührt, wird klar, wenn man berücksichtigt, dass sie ausser den zwei in $B$ liegenden Punkten, mit dieser zwei Punkte gemein hat, welche, weil in $(\Delta e_1)$ nur die eine doppelt zu zählende Erzeugende $e_1$ liegt, nur in $c_1$ vereinigt sein können.

„Der Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ berührt die Regelfläche in einer Raumcurve vierter Ordnung, sechsten Ranges $\mathfrak{B}^4$, welche im Berührungsknoten einen Doppelpunkt hat und die singulären Erzeugenden $e_1$, $e_2$ in den Cuspidalpunkten $(c_1, c_2)$ berührt. Die zwei durch die Spitze laufenden Tangenten berühren sie in den Inflexionspunkten $j_\mathrm{I}$, $j_\mathrm{II}$ von $F^4$."

Für $\mathfrak{B}^4$ gelten noch die leicht nachzuweisenden Eigenschaften:

„Jede Ebene, welche $F^4$ in einem Punkte $n_1$ der Curve $\mathfrak{B}^4$ berührt, berührt sie noch in einem zweiten Punkt $n_2$ derselben Curve. Die Punkte $n_1$, $n_2$ bilden eine centrale, quadratische Involution, mit dem Centrum $\mathfrak{P}$, dem Träger $\mathfrak{K}^2$ und den Doppelpunkten $B$, $j_\mathrm{I}$, $j_\mathrm{II}$."

Die Cuspidalebenen $v_\mathrm{I}$, $v_\mathrm{II}$ haben, als Tangentialebenen des Kegels $\mathfrak{K}^2$, eine durch $\mathfrak{P}$ gehende Schnittlinie $\mathfrak{G}$, die sowohl $c_\mathrm{I}^2$, $c_\mathrm{II}^2$, als auch $e_\mathrm{I}$, $e_\mathrm{II}$ schneidet. Wiederholen wir, dass $v_\mathrm{I}$, $v_\mathrm{II}$ die Regelfläche in allen Punkten von $e_\mathrm{I}$ respective $e_\mathrm{II}$ berühren, so erkennen wir in $\mathfrak{G}$ eine Doppeltangente derselben. Ihre Berührungspunkte $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ sind, wie leicht einzusehen ist, identisch mit den Berührungspunkten der Kegelschnitte $c_\mathrm{I}^2$, $c_\mathrm{II}^2$ und $\mathfrak{G}$; also die Schnitte von $e_\mathrm{I}$ mit $c_\mathrm{II}^2$ beziehungsweise $e_\mathrm{II}$ mit $c_\mathrm{I}^2$.

Art. 3. Die Erzeugenden $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{e}_1'$, welche sich in einer Ebene $E_c$, einem Element des Tangentenebenen-Systems $\mathfrak{K}^2(Ec)$ befinden, können als die Schnitte dieser mit den Ebenen $\varepsilon_1'$ $\varepsilon_1'$ des Büschels $\Delta$ angesehen werden. Beide Gebilde stehen in zwei-zweideutiger Verwandtschaft, haben die Ebene $\varepsilon_B$ sich doppelt entsprechend gemein und erzeugen die Regelfläche $F^4$.

Reciprok (s. Beginn des Art. 2) ist $F^4$ das Erzeugniss der zwei-zweideutigen Punktsysteme $\Delta(\alpha)$ und $D(\beta)$, deren gegenseitige Beziehung, abgesehen von dem Umstand, dass sich der beiden Trägern gemeinschaftliche Punkt $B$ doppelt selbst entspricht, sonst ganz allgemeiner Natur ist. Die Cuspidalpunkte $c_1, c_2, c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$ sind die vier Verzweigungspunkte der erzeugenden Reihen. Je nachdem diese sämmtlich reell, imaginär, oder, in angegebener Reihenfolge ($c_1, c_2 — c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$), paarweise reell und imaginär, und umgekehrt imaginär und reell sind, haben wir vier gleich allgemeine Arten der behandelten Fläche $F^4_{rr}$, $F^4_{ii}$, $F^4_{ri}$ und $F^4_{ir}$ zu unterscheiden. Die erste Flächengattung hat unter Anderem die Eigenschaft, dass jede ihrer beiden Doppellinien durch die auf ihr liegenden Cuspidalpunkte in zwei Theile zerlegt wird; von welchen der eine aus eigentlichen Doppelpunkten besteht — in welchen sich reelle Erzeugende schneiden — während der andere Theil ideell ist und, wie aus Art. 1 ersichtlich ist, ganz innerhalb des Trägerkegels $K^2$ liegt.

Diesem entgegen sind die Doppellinien der Fläche $F^4_{ii}$ ihrer ganzen Ausdehnung nach eigentlich, alle ihre Punkte liegen ausserhalb $K^2$; während von $F^4_{ri}$ der Doppelkegelschnitt $D$ und von $F^4_{ir}$ die Doppelgerade $\Delta$ mit $K^2$ reelle Schnittpunkte ($c_1, c_2$, beziehungsweise $c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$) hat, also die erste eine ihrer ganzen Länge nach eigentliche Doppelgerade, die letztere einen eben solchen Doppelkegelschnitt besitzt. Es ist noch zu bemerken, dass die Cuspidalebenen $v_1, v_2$, für die Flächen $F^4_{rr}$ und $F^4_{ri}$, den vollen Winkel um $\Delta$ in zwei Räume theilen, von der Eigenschaft, dass jede Ebene des einen $F^4$ in zwei reellen, jede des andern in zwei imaginären Punkten von $\Delta$ berührt.

Coincidiren die Cuspidal-, respective Verzweigungspunkte $c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$ der erzeugenden Reihe $\Delta(\alpha)$, so berührt ihr Träger $\Delta$ den Trägerkegel $K^2$ in dem durch das Zusammenfallen von $c_{\text{I}}, c_{\text{II}}$ constituirten Punkte $c$. Während man auch jetzt aus irgend einem Punkt von $D$ zwei Tangentialebenen an $K^2$ legen kann, welche in jedem Falle verschieden sind; ist dies für irgend einen Punkt von $\Delta$ nicht mehr möglich. Je eine dieser Ebenen fällt mit der Ebene $(\Delta O)$ zusammen. Durch jeden Punkt von $\Delta$ läuft also nur eine Erzeugende dieser speciellen Fläche vierten Grades $F^4_{\text{I}}$, welche

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

das Erzeugnissdesdesshalb eindeutigen Punktsystems $D$ ($\beta$) und der zweideutigen Reihe $\Delta$ ($\alpha$) ist. Aus der erklärten und öfters benützten Construction entsprechender Punkte dieser Reihen folgt, dass der Punkt $B$ sich nun einmal selbst entspricht und, als Element von $D$ ($\beta$), auch dem Cuspidalpunkt $c$ zugeordnet ist. So dass die Tangentialebene $\varepsilon_B$ in $B$ nun Cuspidalebene $v$ der (in diesem Fall) mit $\Delta$ coincidirenden und $c$ beigeordneten singulären Erzeugenden $e$ ist, und mit $F_1^4$ ausser $\Delta$, $e$ nur eine durch $B$ gehende, von $\Delta$ verschiedene Gerade $\mathfrak{e}$ gemein hat. Diese Regelfläche hat nur drei Cuspidalpunkte ($c$, $c_1$, $c_2$), drei dem Büschel $\Delta$ angehörige Cuspidalebenen ($v$, $v_1$, $v_2$) und jede Ebene dieses Büschels zur dreifachen Tangentialebene. Der eine Berührungspunkt ist $c$ und fix, die zwei andern bilden eine Involution. Durch jeden Punkt von $\Delta$ läuft nur eine Erzeugende und $F_1^4$ kann desshalb nach keinem eigentlichen Kegelschnitt geschnitten werden.

Ist $c$ identisch mit $B$, also dieser ein Verzweigungspunkt beider Reihen und Berührungspunkt von $\Delta$ mit $K^2$; so coincidirt auch $\mathfrak{e}$ mit $\Delta$, nachdem die $D$ in $B$ tangirende Ebene $\varepsilon_B$ von $\Delta$ und die durch $B$ an $K^2$ gelegte Tangentialebene sich in $\Delta$ durchschneiden. $\varepsilon_B$ hat nun mit $F_2^4$ vier unendlich nahe in $\Delta$ vereinigte Gerade ($\Delta$, $e$, $\mathfrak{e}$) gemein. Sie ist eine Wendetangentenebene derselben und $\Delta$ ihre Inflexionserzeugende. Die Fläche $F_2^4$ daher unter Anderem auch die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass jede ihr eingeschriebene, ebene Curve einen auf $\Delta$ befindlichen Inflexionspunkt, mit einer in $\varepsilon_B$ liegenden Tangente besitzt.

Fallen die Cuspidalpunkte $c_1$, $c_2$ zusammen, so wird $F$ zur Fläche dritten Grades etc.

Art. 4. Nachdem der Schnitt eine Ebene $E$, von allgemeiner Lage, mit $F^4$ eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung, sechster Classe $C_6^4$ ist, und man durch jede Gerade vier Tangentialebenen an $F^4$ legen kann; ist der aus einem Punkt $P$ des Raumes der Fläche umschriebene Kegel $K_4^6$ von der vierten Classe und sechsten Ordnung. Er hat drei Doppeltangentenebenen, von welchen zwei den Kegel $R^2$ berühren, während die dritte durch $\Delta$ geht. Er besitzt vier Doppelkanten, sechs Rückkehrkanten

(welche auf einem Kegel zweiten Grades liegen) und berührt (s. Art. 1) die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten. Seine Berührungscurve $B_{10}^6$ ist von der sechsten Ordnung, dem zehnten Rang [1] (Beweisführung wie in Art. 2 für $\mathfrak{B}^4$) und mit zehn scheinbaren Doppelpunkten versehen, welche einzeln auf den vielfachen Kanten von $K_4^6$ liegen. Sie ist daher nach Eduard Weyr[2] als die einer eigentlichen Fläche vierter Ordnung eingeschriebene Curve, von der Classe (3), d. h. man kann durch sie keine Fläche zweiten Grades und nur eine Fläche dritten Grades legen. (Die Polarfläche des Punktes $P$.)

Die Berührungscurve $B_{10}^6$ begegnet der Doppelgeraden $\Delta$ in den Berührungspunkten $\alpha'$, $\alpha''$ der Ebene $(P\Delta)$ und enthält auch die vier Cuspidalpunkte; hat daher in $\Delta$ eine vierpunktige Sekante. Jede Ebene $\varepsilon$ von $\Delta$ trifft sie noch zweimal, und zwar in Punkten $p'$, $p''$, welche einzeln den Schnittgeraden $e'$, $e''$, von $\varepsilon$ und $F^4$ angehören und eine solche Lage haben, dass die in ihnen an $F^4$ gelegten Tangentialebenen durch $P$ gehen. Diese Bemerkung gibt uns ein einfaches Mittel an die Hand, die Schnittpunkte $p'$, $p''$ für irgend eine Lage von $\varepsilon$ zu finden; sie lehrt uns unter Anderem, dass die Cuspidalebenen $v_1$, $v_2$ die Curve $B_{10}^6$ in $c_1$, beziehungsweise $c_2$ tangiren, und dass daher diese $(B_{10}^6)$ die singulären Erzeugenden $e_1$, $e_2$ in den Cuspidalpunkten berührt, nachdem nämlich auch die Tangentialebenen $(Pe_1)$ und $(e_1 T_1)$ von $K_4^6$, respective $F^4$ in $c_1$ (z. B.) die Curve $B_{10}^6$ berühren müssen, und alle drei Ebenen sich in $e_1$ durchschneiden. Ebenso finden wir, weil nur der Punkt $c_1$ von $e_1$ die Eigenschaft hat, dass eine seiner Tangentialebenen durch $P$ geht, dass die Ebene $(\Delta e_1)$ mit $B_{10}^6$ zwei in $c_1$ vereinigte Punkte gemein hat, also dass die Berührungscurve in allen vier Cuspidalpunkten die singulären Erzeugenden zu Tangenten besitzt.

Die Curve $B_{10}^6$ ist durch drei Punkte, von allgemeiner Lage fixirt, nachdem die Tangentialebenen der $F^4$ in ihnen das Centrum

---

[1] Die aus dem Projectionscentrum an eine Curve $R$ gelegten Tangenten sind Rückkehrkanten des Projectionskegels, und umgekehrt, wenn $R$ keinen wirklichen Rückkehrpunkt besitzt.

[2] Siehe Seite 25 in Ed. Weyr's Inauguraldissertation: „Über algeb. Raumcurven", Abhandlg. d. k. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. zu Prag. 1873.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$P$ bestimmen. Irgend eine zweite Curve $(B_{10}^6)$, mit dem Centrum $(P)$, berührt $B_{10}^6$ in den Cuspidalpunkten und schneidet sie in den vier Berührungspunkten der durch die Gerade $\overline{P(P)}$ an $F^4$ gelegten Tangentialebenen.

Aus der Definition der Berührungscurve $B^6$ erhellt, dass falls sie mit einem wirklichen Doppelpunkt versehen wäre, dieser nur ein Punkt der Doppellinie ($D$ oder $\Delta$) sein könnte, und daher das Centrum $P$ dieser Curve nothwendig entweder in der Involutionsebene $\varepsilon_i$, oder in $\varepsilon_B$ sich befinden muss. Im letztern Fall ist $B$ der Doppelpunkt, im ersteren sind es die Berührungspunkte $m_1$, $m_2$, der aus $P$ an $D$ gezogenen Tangenten. Sie sind eigentlich oder isolirt, je nachdem sie ausser- oder innerhalb $K^2$ liegen; sie sind Rückkehrpunkte von $B^6$, wenn sie mit einem der Cuspidalpunkte $c_1$, $c_2$ coincidiren. Doch ist das Letztere, wie leicht nachzuweisen, auch dann der Fall, wenn $P$ in einer Doppelebene $\varepsilon_I$, $\varepsilon_{II}$ von $\Delta$, oder einer der Ebenen $\tau_1$, $\tau_2$ (s. Art. 1) liegt. Die Curve $B^6$ hat den, mit $P$ in derselben der vier Ebenen befindlichen, Cuspidalpunkt zum wirklichen Rückkehrpunkt und wird durch diesen im Rang um Eins vermindert.[1] So ist die Berührungscurve $B_7^6$, des aus $P=(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1)$ der $F^4$ umschriebenen Kegels $K_4^6$ vom siebenten Rang; sie berührt $e_{II}$ in $c_{II}$ und hat in $c_1$, $c_2$ und $c_1$ Rückkehrpunkte.

Eine Cuspidalebene $v$ berührt $F^4$ längs einer singulären Erzeugenden $e$. Der aus einem ihrer Punkte $P$ der Fläche umschriebene Kegel $K^6$ zerfällt daher in diese Ebene und einen Kegel fünfter Ordnung $K_4^5$, welcher $v$ zur Inflexionsebene und $\overline{Pc}$ zur Inflexionskante hat; $F^4$ in einer Curve $B_8^5$, fünfter Ordnung, achten Ranges berührt, die $c$ nicht enthält und $v$ in dem, in dieser Ebene befindlichen Inflexionspunkt der Regelfläche zur Osculationsebene hat. Ist $P$ der Schnittpunkt dreier Cuspidalebenen $v_I$, $v_{II}$ und $v_1$, deren eine dem Büschel $\Delta$ angehört; so zerfällt $K^6$ in diese und einen Kegel dritter Ordnung, vierter Classe $K_4^3$, der $v_I$, $v_{II}$, $v_1$ zu Inflexionsebenen, $\overline{Pc_I}$, $\overline{Pc_{II}}$ und $\overline{Pc_1}$ zu Inflexionskanten besitzt und $F^4$ in einer Curve dritter Ordnung,

[1] Von den sechs Rückkehrkanten des Kegels $K_4^6$ sind nun nur fünf Tangenten der Curve $B^6$, da eine durch den Rückkehrpunkt derselben bedingt ist.

vierten Ranges $B_4^3$ berührt, die in den Punkten $j_1$, $j_2$ und $d_1$, beziehungsweise $v_I$, $v_{II}$ und $v_1$ zu Osculationsebene hat und $e_2$ in $c_2$ tangirt. Aus der bekannten Thatsache, dass die drei Inflexionskanten eines Kegels $K_4^3$ in einer Ebene liegen, folgt, dass die drei Inflexionspunkte $j_1$, $j_2$, $d_1$ (dasselbe gilt für $j_1$, $j_2$, $d_2$) der Regelfläche $F^4$ mit dem Schnittpunkt $P$ der in ihnen $F^4$ berührenden Cuspidalebenen, einer Ebene angehören.

Für einen Punkt $P$ der Regelfläche, als Projectionscentrum, zerfällt $K_4^6$, als Enveloppe betrachtet, in das durch die durch $P$ laufende Erzeugende $e$ bestimmte Büschel und einen Kegel $K_3$, dritter Classe; als geomet. Ort angesehen, in die doppelt zu zählende Tangentialebene $\tau$ im Punkte $P$ und einen Kegel vierter Ordnung — dessen Symbol demnach $K_3^4$ ist. Dieser Kegel hat die nicht durch $e$ gehende Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$ zur Doppeltangentialebene, berührt die singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten und die Regelfläche in einer Raumcurve fünfter Ordnung, achten Ranges $B_8^5$, welche im Centrum $P$ die eigentliche Haupttangente der Fläche zur Tangente hat und durch zwei Punkte zweideutig (im Allgemeinen) gegeben ist. Liegt $P$ auf einer singulären Erzeugenden, so ist die Berührungscurve von der vierten Ordnung, sie enthält $P$ nicht mehr und berührt die bezeichnete singuläre Erzeugende nicht. Ist $P$ ein Punkt eines der Kegelschnitte $c_I^2$, $c_{II}^2$, so ist der umschriebene Kegel von der dritten Ordnung und Classe; seine Berührungscurve ist von der dritten Ordnung, wenn seine Spitze einer der Inflexionspunkte $j_I$, $j_{II}$ ist.

Aus einem Punkt des Doppelkegelschnittes $D$ wird $F^4$ durch einen Kegel zweiten Grades $K^2$ projicirt, welcher die vier singulären Erzeugenden in den Cuspidalpunkten berührt. Seine Berührungscurve ist von der vierten Ordnung und dem Geschlecht Null, mit einem Doppelpunkt im Centrum. Sie hat in diesem die zwei eigentlichen Haupttangenten des Punktes, und in den Cuspidalpunkten die vier singulären Erzeugenden zu Tangenten.

Jede Erzeugende $e'$ der Regelfläche $F^4$ berührt jeden dieser Fläche umschriebenen Kegel (also auch $K^2$) einmal, und fixirt daher eine Tangentialebene $\tau'$ desselben; sie bestimmt ferner mit $\Delta$ eine Ebene $\varepsilon$ dieses Büschels, welche $F^4$ noch in einer Erzeu-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

genden $\varepsilon_1'$ schneidet, die wieder mit $K$ nur eine Tangentialebene $\tau_1'$ dieses Kegels feststellt. Die Ebenen $\tau'$, $\tau_1'$ bilden eine quadratische Tangentenebeneninvolution $J$, mit dem Träger $K$ und einem Involutionskegel $k_i^2$, zweiten Grades, der $D$ zur Basis und die Spitze $P$ von $K$ zur Spitze hat. Diese Involution ist mit dem Büschel $\Delta(\varepsilon)$ projectivisch, hat mit demselben die Ebene $(P\Delta)$, sich zweimal entsprechend, gemein und erzeugt mit ihm die behandelte Regelfläche.

Aus dieser Auseinandersetzung ergibt sich ohne Weiteres der Satz:

„Jeder der Regelfläche $F^4$ umschriebene Kegel zweiten Grades kann als Trägerkegel einer Tangentenebeneninvolution zweiter Classe betrachtet werden, welche mit demselben Ebenenbüschel $\Delta$ projectivisch ist und mit ihm die genannte Fläche erzeugt."

Es ist nun auch klar, dass innerhalb irgend eines Kegels $K^2$ nur imaginäre einfache und isolirte Doppelpunkte der Regelfläche liegen können, und umgekehrt, jeder ausserhalb gelegene Flächenpunkt reell und eigentlich sein muss.

Die Berührungscurve $B^4$ eines der Kegel $K^2$ kann auch als die Durchdringung desselben mit einem Hyperboloid $P^2$ angesehen werden, welches das Erzeugniss des Ebenenbüschels $\Delta$ und des Scheines $P$, der von Tangentenebeneninvolution $J^2$ an $K^2$ gebildeten Strahleninvolution $i$ ist, und das mit $F^4$, ausser $\Delta$ und $B^4$, die singulären Erzeugenden $e_1$, $e_2$ gemein hat.

Umschreiben wir aus irgend einem Punkt $P$ des Raumes sowohl der Regelfläche als auch den Doppelkegelschnitt $D$ Kegel: $K_4^6$ beziehungsweise $k^2$, so schneiden sich beide in zwölf Kanten. Zwei zielen nach den Cuspidalpunkten $c_1$, $c_2$, je zwei — also im Ganzen acht — nach den $D$ und der Berührungscurve $B^6$ von $K^6$ gemeinschaftlichen, von $c_1$, $c_2$ verschiedenen, vier Punkten, so dass nur zwei Schnittkanten $t_1$, $t_2$, die Eigenschaft haben, $F^4$ in Punkten $b_1$ respective $b_2$ zu berühren, die von ihren Schnittpunkten $\beta_1, \beta_2$ mit $D$ verschieden sind. Diese zwei Kanten bestimmen ebenso viele durch $P$ gehende Trägerkegel $K^2$, zweiten Grades; nachdem der aus $\beta_1$ der Fläche um-

schriebene Kegel die Gerade $\overline{\beta_1 b_1} P = t_1$, und der aus $\beta_2$ umschriebene Kegel die Gerade $\overline{\beta_2 b_2} P = t_2$ zur Erzeugenden besitzt.

„In jedem Punkt des Raumes schneiden sich zwei der Regelfläche umschriebene Kegel zweiten Grades."

Befindet sich der Punkt auf $F^4$, so ist sowohl $K^2$ als auch $B^4$ eindeutig gegeben.[1]

Art. 5. Die reciproken Betrachtungen sind nun leicht zu bilden. Irgend eine Ebene $E$ schneidet $F^4$ in einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, welche die Schnittpunkte $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, ihrer Ebene mit den Doppellinien, zu Doppelpunkten hat. Die Tangenten $t_1$, $t_2$ in einem derselben $(\Delta_n)$ sind die Schnitte von $E$ mit den Tangentialebenen der $F^4$ in $\Delta_n$; sie coincidiren und $\Delta_n$ ist ein Rückkehrpunkt, wenn er ein Cuspidalpunkt der Fläche ist. Eine Fläche $F^4_{rr}$, mit vier reellen Cuspidalpunkten, kann daher zweimal nach ebenen Curven $C^4_3$, mit drei Rückkehrpunkten geschnitten, und nur dieser Fläche können ebene Curven $C^4_6$, mit drei isolirten Doppelpunkten, eingeschrieben werden. Die Fläche $F^4_{ii}$ enthält nur Curven $C^4_6$ mit drei eigentlichen Doppelpunkten und keine Curve $C^4_3$ etc. Eine Ebene des Bündels $B$ und jede, welche eine Tangente von $D$ enthält, schneidet $F^4$ in einer Curve mit einem Berührungsknoten. Curven $C^4_6$, deren Ebenen die am Schlusse des zweiten Artikels erwähnte Gerade $\mathfrak{G} \equiv (v_{\mathrm{I}} v_{\mathrm{II}})$ besitzen, haben drei sich in $\mathfrak{P}$ schneidende Doppeltangenten. Die eine ist $\mathfrak{G}$, die zwei andern liegen auf $\mathfrak{K}^2$ und sind beide eigentlich, wenn $\mathfrak{G}$ imaginär ist; eine eigentlich, die andere ideell, wenn $\mathfrak{G}$ reell ist etc.

Eine durch eine Erzeugende e gelegte Ebene $E$ schneidet $F^4$ noch in einer Curve dritter Ordnung $C^3_4$, deren mit $E$ variabler Schnittpunkt $b$ mit e der Berührungspunkt ihrer Ebene ist, und mit einem Cuspidalpunkt coincidirt, sobald e eine singuläre Erzeugende ist.

Die Doppelpunktstangenten der Curven $C^3$ des Büschels e erfüllen eine Regelfläche fünften Grades, welche e zur dreifachen Geraden und $D$ zur Doppellinie hat. Die Ebenen der Curven $C^3_4$, welche einen Punkt gemein haben, umhüllen den aus ihm der

[1] Es ist noch zu erwähnen, dass wenn $P$ ein Cuspidalpunkt ist, $B^4$ in ihm einen Rückkehrpunkt hat; und dass $B^4$ in eine Curve dritter Ordnung und eine singuläre Erzeugende zerfällt, wenn $P$ mit $d_{\mathrm{I}}$ oder $d_{\mathrm{II}}$ identisch wird.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Fläche umschriebenen Kegel $K_3^4$. Durch zwei Punkte ist $C_4^3$ zweideutig gegeben; so gehen durch die zwei Inflexionspunkte $j_\text{I}$, $j_\text{II}$ zwei Curven bezeichneter Art. Jede hat in diesen Punkten, also auch in ihrem dritten Schnittpunkt mit $\overline{j_\text{I}\, j_\text{II}}$ einen Inflexionspunkt, woraus weiter folgt, dass sich die Haupttangenten der Fläche in ihren anderen mit $\overline{j_\text{I}\, j_\text{II}}$ gemeinschaftlichen Punkten, mit den durch diese laufenden Erzeugenden wechselweise schneiden. Nachdem die acht Schnittpunkte, der Fläche mit dem imaginären Kugelkreis, nur vier reelle Verbindungslinien zulassen, enthält $F^4$ acht cyklische ebene Curven dritter Ordnung. Curven dritter Ordnung und Classe enthält $F^4$ nur dann, wenn die Cuspidalpunkte $c_1$ und $c_2$ reell sind; ihre Ebenen umhüllen die aus diesen Punkten der Fläche umschriebenen Kegel $K_1^2$ und $K_2^2$. Sie sind durch einen Punkt zweideutig gegeben.

Ein Kegelschnitt $C^2$ ist durch einen Punkt vollkommen fixirt; dabei muss bemerkt werden, dass die Doppelgerade $\Delta$ von keinem Kegelschnitt getroffen wird, wogegen sich in jedem Punkt des Doppelkegelschnittes $D$ zwei durchschneiden. Jede Ebene wird von zwei $F^4$ eingeschriebenen Kegelschnitten berührt (s. Schluss des Art. 4); diese Fläche besitzt daher zwei Parabeln; und ebenso viele umschriebene Zilinder zweiten Grades.

Die drei Rückkehrtangenten einer Curve $C_3^4$ schneiden sich in einem Punkt; dieser ist auch der Schnitt der Ebene dreier Cuspidalpunkte und der Tangentialebenen $\varepsilon_1$, $\tau_1$ und $\tau_2$ in denselben.

Art. 6. Wenden wir uns wieder der in Art. 4 begonnenen Untersuchung des Systems der $F^4$ umschriebenen Kegel zweiten Grades zu. Jeder berührt die singulären Erzeugenden $e_1$, $e_2$ in den Cuspidalpunkten $c_1$ beziehungsweise $c_2$ und bestimmt mit ihnen zwei Tangentialebenen $\tau_1$ und $\tau_2$, welche ihn beziehungsweise längs $\overline{c_1 P}$ und $\overline{c_2 P}$ tangiren; also sich in einer Geraden $\mathfrak{p}$ schneiden, die die auf $P(K^2)$ bezogene Polare der Involutionsebene $\varepsilon_i$ ist. Durchläuft die Spitze $P$ des Kegels $K^2$ den Doppelkegelschnitt, so bilden die Ebenen $\tau_1$ und $\tau_2$ zwei projectivische Ebenenbüschel $e_1(\tau_1)$ und $e_2(\tau_2)$ und daher ihre Schnittlinie $\mathfrak{p}$ ein einschaliges Hyperboloid $\pi^2$, welches auch $e_1$, $e_2$ und $\Delta$ zu Erzeugenden hat.

„Das durch den Doppelkegelschnitt $D$, die Doppelgerade $\Delta$ und die singulären Erzeugenden $e_1$ und $e_2$

bestimmte Hyperboloid $\pi^2$ ist der geometrische Ort der Polaren der Ebene des Doppelkegelschnittes, bezogen auf die der Fläche umschriebenen Kegel zweiten Grades."

Zu weiteren Eigenschaften des Hyperboloides $\pi^2$ gelangen wir durch Lösung einer Frage, welche mit dem Gesagten scheinbar in keinem Zusammenhang steht. Diese Frage betrifft die der Fläche eingeschriebenen ebenen Curven $C^4$, mit einem Doppelinflexionspunkt.[1]

Die Fläche $F^4$ hat in jedem Punkt $P$ von $D$, ausser den Erzeugenden, zwei eigentliche Haupttangenten $t_1, t_2$, welche Inflexions- und Doppelpunktstangenten des Schnittes $C^4_6$, ihrer Ebene mit $F^4$, sind.

Durch jeden Punkt von $D$ kann man also nur eine Ebene $\mathfrak{E}$ legen, welche $F^4$ in einer Curve $C^4_6$ bezeichneter Art schneidet. Ferner wissen wir aus l. c. und der Abhandlung: „Über vierfach berührende Kegelschnitte der Curven vierter Ordnung mit etc." Sitzungsbericht vom 3. Juli 1879, dass eine Curve $C^4_6$ dann einen Doppelinflexionspunkt $P$ besitzt, wenn dieser der Pol der Gegenseite des Doppelpunktsdreieckes (der Curve) bezüglich eines — also auch aller — vierfach berührenden Kegelschnitte der Curve $C^4_6$ ist. Es ist also vor Allem nothwendig, dass die Ebene $\mathfrak{E}$ den Doppelkegelschnitt $D$ in zwei einander bezüglich $c_1, c_2$ harmonisch conjugirten Punkten $P$ und $P'$ schneidet, daher durch das Centrum $\Omega$ — welches der Schnitt der Tangenten $T_1$ und $T_2$ von $D$ in $c_1$ beziehungsweise $c_2$ ist — der Involution $(c_1 c_2 PP') = -1$ geht.

Die Polarebene $(\mathfrak{p})$ des Punktes $P$, bezogen auf den aus $P'$ der Fläche umschriebenen Kegel $P'(K^2)$, berührt $D$ in $P'$ und trifft $\Delta$ in einem Punkt $P''$ Jede Gerade $g$ der Ebene $(\mathfrak{p})$, also auch $\overline{P'P''}$, hat die Eigenschaft, dass sie die Polare des Punktes $P$ bezüglich des in der Ebene $(gP)$ beziehungsweise $(P'P''P)$ gelegenen Kegelschnittes von $P'(K^2)$ ist. Die Gerade $\overline{P'P''}$ ist aber auch für die Schnittcurve $C^4_6$, der Ebene $(PP'P'')$ mit $F^4$, die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte $P'$ und $P''$; also, nach den citirten Abhandlungen, die Polare von $P$ bezogen auf alle vier-

[1] Siehe: „Über rat. Curven vierter Ordnung, deren Doppelpunkstangenten in Inflexionstangenten übergehen." Sitzb. d. k. Akademie d. Wissenschaften. Märzheft 1879.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

fach berührenden Kegelschnitte von $C_6^4$, d. h. bezüglich der Schnitte der Ebene $(PP'P'')$ mit allen Kegeln $K^2$. In ihr schneiden sich die Polarebenen des Punktes $P$ rücksichtlich aller $K^2$ — sie ist die gemeinschaftliche Polare dieses Punktes. Da aber die Polarebene $(\mathfrak{p})$ von $P$, bezüglich irgend eines Kegels $P_n(K^2)$, identisch ist mit der Polarebene der Verbindungslinie $\overline{PP}_n$, seiner Spitze mit $P$; muss diese Ebene, weil $\overline{PP}_n$ in der Involutionsebene $\varepsilon_i$ liegt, durch die Polare $\mathfrak{p}$ der letztgenannten Ebene bezüglich desselben Kegels $P_n(K^2)$, gehen. Dies gilt für jeden Kegel $K^2$ und jede Gerade $\mathfrak{p}$; jede solche befindet sich mit $\overline{P'P''}$ in einer Ebene $(\mathfrak{p})$, deren Gesammtheit das Büschel $\overline{P'P''}$ bildet. Die Gerade schneidet also umgekehrt alle Geraden $\mathfrak{p}$, d. h. jede der Schaar $\Delta$ angehörige Erzeugende des Hyperboloides $\pi^2$; sie ist eine der Schaar $(e_1, e_2)$ angehörige Erzeugende dieser Fläche.

„Die Polarebenen eines Punktes $P$ des Doppelkegelschnittes $D$, bezüglich der der Regelfläche $F^4$ umschriebenen Kegel zweiten Grades $K^2$, schneiden sich in einer Geraden $\overline{P'P''}$; welche das Hyperboloid $\pi^2$ erzeugt, wenn $P$ den Kegelschnitt $D$ durchläuft."

Dieses Hyperboloid hat also zur einen Erzeugenden-Schaar — welcher $\Delta$ angehört — die Polaren von $\varepsilon_i$ bezüglich aller $K^2$; zur andern die Polaren der Punkte von $D$, ebenfalls bezogen auf alle $K^2$; so dass eine Erzeugende dieser Schaar — welcher $e_1$, $e_2$ angehören — die auf sämmtliche $K^2$ genommene Polare des ihr auf $D$ bezüglich $c_1$, $c_2$ harmonisch conjugirten Punktes $P$ ist.

Das Hyperboloid $\pi^2$ ist aber auch der geometrische Ort der, bezüglich je zweier in einem Punkt des Doppelkegelschnittes sich schneidenden Erzeugenden, der Involutionsebene harmonisch conjugirten Geraden; da dieser mit ihm $D$, $\Delta$ und $e_1$, $e_2$ gemeinschaftlich hat.

Zur Betrachtung der Curven $C_6^4$, mit einem Doppel-Inflexionspunkt, zurückkehrend, bemerken wir, dass die Ebene einer solchen, sowohl $\Omega$ als auch eine der Geraden $\overline{P'P''}$ enthalten muss, d. h. eine durch $\Omega$ gelegte Tangentialebene von $\pi^2$ ist.

Die Ebenen, welche $F^4$ nach Curven vierter Ordnung, mit einem Doppelinflexionspunkt schneiden, welche also die Haupttangenten von $F^4$ in Punkten von $D$ enthalten, umhüllen einen Kegel zweiten

Grades $f^2$; der dem Hyperboloid $\pi^2$ aus dem Schnittpunkt $\Omega$, der Tangenten von $D$ in den Cuspidalpunkten $c_1$, $c_2$, umschrieben ist; also diese zu Erzeugenden hat und die Ebenen $(\Omega\Delta)$, $(\Omega c_1)$, $(\Omega c_2)$, $(\Omega c_I)$ und $(\Omega c_{II})$ berührt."

Dem Hyperboloid $\pi^2$ ist, in seinen Beziehungen zur Regelfläche, ein anderes reciprok, welches man am besten als das Erzeugniss $\mathfrak{P}^2$ der, von dem System der Kegelschnitte $C^2$ auf den singulären Erzeugenden $e_I$, $e_{II}$ gebildeten, projectivischen Punktreihen $e_I(p_I)$ und $e_{II}(p_{II})$ erhält; und das auch die Doppelgerade $\Delta$ zur Erzeugenden hat. Die Tangenten $\mu_I$, $\mu_{II}$ von $C^2$ in $p_I$ beziehungsweise $p_{II}$ schneiden sich in $\mathfrak{P}$, der Spitze des Kegels $\mathfrak{K}^2$, [die wir auch — da sie $\varepsilon_i$ reciprok ist — kurz Involutionscentrum nennen wollen]; weil sie sowohl in der durch $\mathfrak{P}$ gehenden Ebene $E_c$ von $C^2$, als auch in den Tangentialebenen von $F^4$ in den bezeichneten Punkten, den ebenfalls $\mathfrak{P}$ enthaltenden Cuspidalebenen $v_I$, $v_{II}$, liegen müssen. Die Erzeugende $p_I p_{II}$ ist daher die Polare von $\mathfrak{P}$ bezüglich $C^2$; sie befindet sich in der Ebene $E_c$ (von $C^2$), und schneidet demnach die Berührungskante $g$, dieser Ebene mit $\mathfrak{K}^2$, in dem dem Punkte $\mathfrak{P}$ bezüglich $n_1$, $n_2$ [1] harmonisch conjugirten Punkt $m$. Der geometrische Ort dieses Punktes ist, als Berührungscurve von $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{K}^2$, ein Kegelschnitt $M^2$, welcher, dem Gesagten zufolge, den Berührungsknoten $B$ und die Inflexionspunkte $j_I$, $j_{II}$ enthält.

„Das durch die Doppelgerade $\Delta$, die singulären Erzeugenden $e_I$, $e_{II}$ und den Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ bestimmte Hyperboloid $\mathfrak{P}^2$ ist der geometrische Ort der Polaren der Spitze $\mathfrak{P}$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$, bezüglich der $F^4$ eingeschriebenen Kegelschnitte $C^2$. Es berührt den Kegel $\mathfrak{K}^2$ in einem Kegelschnitt $M^2$, dessen Punkte der Spitze $\mathfrak{P}$, bezüglich der Berührungscurve $\mathfrak{B}^4$ von $\mathfrak{K}^2$ mit $F^4$, harmonisch conjugirt sind."

Dieses Hyperboloid ist aber auch der Ort der dem Punkte $\mathfrak{P}$, dem Involutionscentrum, bezüglich je zweier in einem Punkt $\alpha$ von $\Delta$ sich schneidenden Erzeugenden von $F^4$ harmonisch conjugirten Geraden $\overline{\alpha m}$; d. h. es ist die auf $F^4$ bezogene Polarfläche von $\mathfrak{P}$; weil diese mit $\mathfrak{P}^2$ den Kegelschnitt $M^2$ und $\Delta$, $e_I$ und $e_{II}$ gemeinschaftlich hat.

[1] Bezüglich der Bezeichnung s. Art. 2.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Für dieses Hyperboloid gilt, wie nun leicht einzusehen ist, auch der Satz:

„Die Pole[1] einer Tangentialebene $E_c$ des Kegels $\mathfrak{K}^2$, bezüglich der Kegelschnitte $C^2$, liegen auf einer Geraden $(E_c' E'')$, der Polare von $E_c$; welche das Hyperboloid $\mathfrak{P}^2$ erzeugt, wenn $E_c$ den Kegel $\mathfrak{K}^2$ umhüllt."

Die durch die Polare $(E_c' E'')$ fixirte Tangentialebene von $\mathfrak{K}^2$, ist der Ebene $E_c$, bezüglich der Cuspidalebenen $v_I$, $v_{II}$, auf $\mathfrak{K}^2$ harmonisch zugeordnet. Die Gerade $(E_c' E'')$ bildet nur die eine Erzeugenden-Schaar von $\mathfrak{P}^2$, und zwar jene, welcher auch $e_I$, $e_{II}$ angehören; wogegen die andere aus den auf $C^2$ bezogenen Polaren von $\mathfrak{P}$ besteht und $\Delta$ enthält.

Art. 7. Durch einen Punkt $\gamma$ einer der Fläche $F^4$ eingeschriebenen ebenen Curve $C$ geht nur eine Erzeugende $\mathfrak{e}$, welcher in ihrem Schnittpunkt $\alpha$ mit $\Delta$ eine zweite Erzeugende $\mathfrak{e}_1$ begegnet. Diese trifft $C$ in einem Punkt $\gamma_1$, der mit $\gamma$ involutorisch liegt (wegen der Vertauschungsfähigkeit von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$) und daher mit ihm — wenn sich dieser bewegt — eine Punktinvolution $i$ bestimmt, die $C$ zum Träger hat und mit der projectivischen Reihe $\Delta(\alpha)$ die Fläche $F^4$ erzeugt. Die Involutionscurve von $i$ ist der Schnitt $c_i^2$ der Ebene $E$ von $C$ mit dem Kegel $\mathfrak{K}^2$, weil die Gerade $\overline{\gamma\gamma_1}$, als in der Tangentialebene $(\mathfrak{e}\,\mathfrak{e}_1) = E_c$ von $\mathfrak{K}^2$ liegend, diesen und daher auch $c_i^2$ tangirt.

Durch die Bemerkung, dass die erzeugende Punktinvolution central wird, wenn die Ebene $E$ (der Trägercurve) durch die Spitze $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}^2$ — das Involutionscentrum — gelegt ist, und auch ein der Fläche eingeschriebener Kegelschnitt $C^2$ ($E$ berührt $\mathfrak{K}^2$) zur Trägercurve gewählt werden kann; gelangen wir zu einer Entstehungsart von $F^4$ — durch $\Delta(\alpha)\pi$ mit $C^2(\gamma\gamma_1)$ — welche jener, die wir im Art. 1 als Definition von $F^4$ aufgestellt haben, reciprok ist.

Die Erzeugenden der Fläche $F^4$ bestimmen auf irgend zwei ebenen Curven $C_1$ und $C_2$ derselben zwei projectivische Punktsysteme, und umgekehrt kann $F^4$ immer als das Erzeugniss zweier

[1] Als Pol einer Ebene, bezüglich eines Kegelschnittes, sehen wir den Pol der Schnittlinie, der Ebene mit der Ebene des Kegelschnittes, an; und reciprok etc.

solcher angesehen werden. Fassen wir den einfachsten und interessantesten Fall, nämlich zwei projectivische Punktsysteme $C_1^2(\alpha)$ und $C_2^2(\beta)$ auf zwei Kegelschnitten, ins Auge; so ist vor Allem klar, dass diese, im Allgemeinen, wohl eine Regelfläche vierten Grades, aber nicht mit einer Doppelgeraden, sondern einer allgemeinen Doppellinie dritter Ordnung erzeugen; dass demnach gewisse Einschränkungen in der Annahme gemacht werden müssen.

Statt also drei Punkten von $C_1^2$ drei beliebige Punkte auf $C_2^2$ zuzuordnen; nehmen wir zwei Punkte $\alpha_I$ und $\alpha_{II}$ von $C_1^2$, legen durch die Tangenten des $C_1^2$ in ihnen je eine Ebene $v_1$, beziehungsweise $v_2$, welche auch $C_2^2$, und zwar in $\beta_I$, respective $\beta_{II}$ berühren, betrachten dann $\alpha_I\beta_I$, $\alpha_{II}\beta_{II}$ als singuläre Erzeugende und $v_1$ und $v_2$ als Cuspidalebenen des Erzeugnisses. Die Ebenen $v_1$, $v_2$ schneiden sich in einer Geraden $\Delta$, welche das Erzeugniss $(C_1^2 C_2^2)$ in ihren Schnitten $d_1$ und $d_2$ mit $\alpha_I\beta_I$, beziehungsweise $\alpha_{II}\beta_{II}$ berührt, und daher ganz auf $(C_1^2 C_2^2)$ liegt, wenn irgend einem Punkte $\alpha$ von $C_1^2$ ein derart gelegener Punkt $\beta$ auf $C_2^2$ zugewiesen wird, dass $\alpha\beta$ sie schneidet. Die Gerade $\Delta$ ist, wie leicht einzusehen, die Doppelgerade des Erzeugnisses, und dieses unter den gemachten Prämissen die Fläche $F^4$. Dasselbe gilt reciprok von zwei projectivischen Tangentenebenen-Systemen auf zwei Kegeln zweiten Grades.

Ebenso können die der Fläche $F^4$ eingeschriebenen Curven, in geschickter Zusammenstellung, als Leitlinien einer sie beschreibenden, oder erzeugenden Curve (auch Fläche) angenommen werden. So wird die Regelfläche $F^4$ durch eine Gerade erzeugt, welche an einer Geraden $\Delta$, die einen von zwei, sich zweimal begegnenden Kegelschnitten $D$ und $C^2$ einmal schneidet, und an diesen gleitet. Reciprok beschreibt eine Gerade die Fläche $F^4$ wenn sie zwei sich doppelt berührende Kegel $\mathfrak{K}^2$ und $K^2$ constant berührt und eine Tangente $\Delta$ des ersteren schneidet. In derselben Weise können $\Delta$, $D$ und $K^2$, oder $\Delta$, $\mathfrak{K}^2$ und $C^2$ zu Leitgebilden einer Geraden gewählt werden; nur muss ihre gegenseitige Lage jene sein, welche die gleichbezeichneten Gebilde von $F^4$ einnehmen. Doch kann $F^4$ auch durch Bewegung eines Kegelschnittes, oder eines Kegels $K^2$ erzeugt werden, und diese Entstehungsarten sind, nächst den erwähnten, wohl die interessantesten. So ist der geometrische Ort eines Kegelschnittes $C^2$, der

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

an fünf einen Kegel $\mathfrak{K}^2$ berührenden Geraden $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ und $e_5$, die eine Tangente $\Delta$ desselben schneiden, gleitet und dessen Ebene constant $\mathfrak{K}^2$ berührt, die Regelfläche $F^4$. Legen wir ferner durch fünf Gerade $e_1$ $e_5$, die sowohl einen Kegelschnitt $D$, als eine in einmal treffende Gerade $\Delta$ schneiden, und irgend einen Punkt $\beta$ von $D$ Ebenen; so fixiren diese einen Kegel $K^2$, zweiten Grades, dessen Umhüllende, bei Bewegung seiner Spitze auf $D$, die Fläche $F^4$ ist, etc. etc.

Durch zwei sich in zwei Punkten $\beta_1$, $\beta_2$ schneidende Kegelschnitte $D$ und $C^2$ kann man nur zwei Kegel zweiten Grades $\mathfrak{k}_1^2$ und $\mathfrak{k}_2^2$ legen.[1]

Betrachten wir einen Punkt $\sigma_1$ der singulären Erzeugenden $e_I$ als Spitze und $D$ als Basis eines Kegels $\mathfrak{k}_1^2$; so berührt dieser offenbar $F^4$ längs $e_I$, und hat demnach mit dieser Fläche — da $D$ als Schnitt doppelt zu zählen ist — noch einen eigentlichen Kegelschnitt $C^2$ gemein. Da Dasselbe auch für Punkte $\sigma_2$ von $e_{II}$ gilt, sehen wir, dass der zweite durch $D$ und $C^2$ bestimmte Kegel $\mathfrak{k}_2^2$ $F^4$ längs $e_{II}$ berührt, und dass die Beziehung, sowohl zwischen den Punkten $\sigma_1$, $\sigma_2$, als auch zwischen den Kegeln $\mathfrak{k}_1^2$, $\mathfrak{k}_2^2$, eine projectivische ist.

Doch kann man auch direct nachweisen, dass der durch $D$ und $C^2$ bestimmte, zweite Kegel $\mathfrak{k}_2^2$ seine Spitze $\sigma_2$ auf $e_{II}$ hat. Wir sehen, zu dem Ende, $D$ und $C^2$ als zwei collineare Curven an.

Die Tangente $t$, in einem Punkte $b$ von $D$, trifft die Collineationsaxe $\overline{\beta_1 \beta_2}$ in einem Punkt $a$, aus welchem man zwei Tangenten $t_1$ und $t_2$ an $C^2$ legen kann. Je nachdem man die Tangenten $t$ und $t_1$, oder $t$ und $t_2$ zuordnet, erhält man $\overline{bb_1}$ oder $\overline{bb_2}$ zum Collineationsstrahl; ein weiterer, jedoch fester, d. h. von der gemachten Zuordnung unabhängiger, Strahl ist die Verbindungslinie $p$, des Schnittpunktes der Tangenten von $D$ in $\beta_1$, $\beta_2$ und jenes der Tangenten von $C^2$ in denselben Punkten; woraus wir sehen, dass,

---

[1] Die zwei Kegelschnitte bestimmen ein Flächenbüschel zweiten Grades, dessen Elemente die Gerade $\overline{\beta_1 \beta_2}$ und die auf eine Fläche desselben bezogene Polare $p$ dieser Geraden, in dieser Eigenschaft, gemeinschaftlich haben. Jede Fläche des Büschels schneidet $p$ in zwei getrennten, eine Involution bildenden Punkten; deren zwei Doppelpunkte die Spitzen der oben erwähnten Kegel sind.

weil $\overline{bb_1}$ und $\overline{bb_2}$ mit $p$ zwei Punkte $\sigma_1$, beziehungsweise $\sigma_2$ fixiren und jeder als Collineationscentrum angesehen werden kann, $D$ und $C^2$ zwei Kegel bestimmen, und dass die Spitzen eben $\sigma_1$ und $\sigma_2$ sind. Dass diese, respective auf $e_\mathrm{I}$ und $e_\mathrm{II}$ liegen — dies ist eigentlich zu zeigen — lässt sich nun dadurch nachweisen, dass man den beliebig angenommenen Punkt $b$ mit $d_\mathrm{I}$ oder $d_\mathrm{II}$ coincidiren lässt. Im ersten Fall erhält man die singuläre Erzeugende $e_\mathrm{I}$ zum Collineationsstrahl — da die Tangenten der Kegelschnitte $D$ und $C^2$ in ihren auf $e_\mathrm{I}$ befindlichen Punkten ($d_\mathrm{I}$ und $\delta_1$), als in der Cuspidalebene $v_\mathrm{I}$ liegend, sich in dem Schnitt dieser mit $\overline{\beta_1\beta_2}$ treffen — sie läuft durch $\sigma_1$; im letztern Fall erkennt man $e_\mathrm{I}$ als Collineationsstrahl, und zwar des Centrums $\sigma_2$, da er mit $e_\mathrm{I}$ windschief ist. Aus diesen Erklärungen geht unter Anderem hervor, dass sich die Cuspidalpunkte $c_\mathrm{I}$ und $c_\mathrm{II}$ als Elemente der Reihen $e_\mathrm{I}(\tau_1)$, $e_\mathrm{II}(\sigma_2)$, entsprechen; da die aus ihnen dem Doppelkegelschnitt umschriebenen Kegel sich längs $\overline{c_\mathrm{I}c_\mathrm{II}} = \Delta$ berühren; und dass auch $\Delta$ eine Erzeugende des Hyperboloides $h^2$ ist, das durch die genannten Reihen erzeugt wird. Weiter finden wir, dass dem Punkte $d_\mathrm{I}$ (Analoges gilt für $d_\mathrm{II}$) die auf $e_\mathrm{II}$ liegende Spitze es, durch $D$ und $C_\mathrm{I}^2$ bestimmten, Kegels beigeordnet ist, etc.

„Wenn man aus entsprechenden Punkten $\sigma_1$, $\sigma_2$, zweier projectivischen, windschiefen Punktreihen $e_\mathrm{I}$ und $e_\mathrm{II}$, einem Kegelschnit $D$, welcher das durch $e_\mathrm{I}$, $e_\mathrm{II}$ erzeugte Hyperboloid $h^2$ in einem Punkt $B$ berührt und $e_\mathrm{I}$, $e_\mathrm{II}$ schneidet, Kegel umschreibt; so durchschneiden sich diese noch in einem eigentlichen Kegelschnitt $C^2$, dessen geometrischer Ort eine Regelfläche vierten Grades ist, die die durch $B$ laufende Erzeugende $\Delta$ von $h^2$ (welche auch $e_\mathrm{I}$, $e_\mathrm{II}$ schneidet) und $D$ zu Doppellinien, und $e_\mathrm{I}$, $e_\mathrm{II}$ zu singulären Erzeugenden hat.“

Ebenso gelten die reciproken Sätze:

„Jeder der zwei Kegelschnitte $c_1^2$, $c_2^2$, in welchen der Doppeltangentenebenen-Kegel $\mathfrak{K}^2$ einen der Fläche $F^4$ umschriebenen Kegel zweiten Grades $K^2$ schneidet, berührt eine singuläre Erzeugende $e_1$, beziehungsweise $e_2$ im Cuspidalpunkt. Ihre Ebenen bilden zwei projectivische Büschel mit den Axen $e$ und $e_2$.“

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

„Wenn man einem Kegel $\mathfrak{K}^2$, der die Axen $e_1$, $e_2$, zweier projectivischen, windschiefen Ebenenbüschel tangirt und ihr Erzeugniss $h^2$ in einem Punkte $B$ berührt, durch entsprechende Ebenen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ von $e_1$, beziehungsweise $e_2$ schneidet; so haben diese Schnitte noch einen Kegel $K^2$ gemein, dessen Enveloppenfläche eine Fläche $F^4$ ist, die den Ort der Spitze von $K^2$ zum Doppelkegelschnitt hat, etc.“

Diesen Entstehungsarten der Fläche $F^4$ wollen wir noch zwei durch projectivische Flächenbüschel, und zwar allgemeinerer Art hinzufügen, welche der folgenden Bemerkung leicht zu entnehmen sind.

Ein durch den Doppelkegelschnitt $D$ und einen Kegelschnitt $C^2$ gelegtes Hyperboloid $h^2$ schneidet $F^4$ noch in einem Kegelschnitt, der den zweiten Schnittpunkt $\alpha$ von $h^2$ und $\Delta$, zum Doppelpunkt hat, d. h. aus den zwei durch $\alpha$ laufenden Erzeugenden $e$ und $e_1$ besteht. Umgekehrt kann man durch $D$ und $e$, $e_1$ unendlich viele Hyperboloide legen, deren jedes $F^4$ in einem Kegelschnitt $C^2$ schneidet.

„Ist $D$ ein Kegelschnitt, welcher jeden von zwei beliebig im Raum angenommenen Kegelschnitten $C_1^2$ und $C_2^2$ in zwei Punkten schneidet und mit einer Geraden $\Delta$, die weder $C_1^2$ noch $C_2^2$ schneidet, einen Punkt $B$ gemein hat, so schneiden sich zwei (projectivische) Hyperboloide $h_1^2$, $h_2^2$, welche durch $D$, $C_1^2$, respective $D$, $C_2^2$ und einen Punkt $\alpha$ von $\Delta$ gelegt sind, in zwei durch diesen laufenden Geraden $e$, $e_1$, welche, wenn $\alpha$ die Gerade $\Delta$ durchläuft, eine Regelfläche $F^4$ beschreiben, die $D$ und $\Delta$ zu Doppellinien hat.“

„Es seien $e$, $e_1$ und $e'$, $e_1'$ zwei Geradenpaare, deren jedes sich schneidet, und $\Delta$ die Verbindungslinie dieser Schnittpunkte $[(e, e_1), (e', e_1')]$, ferner $D$ ein Kegelschnitt, welcher jede der fünf Geraden einmal trifft. Sowohl durch $D$, $e$, $e_1$, als auch durch $D$, $e'$, $e_1'$ ist ein Flächenbüschel zweiten Grades $h_1^2$, respective $h_2^2$ bestimmt; eine Fläche $h_1^2$ des einen schneidet jede des andern $h_2^2$ in einem Kegelschnitt $C^2$, welcher $D$ in zwei Punkten begegnet. Weisen wir die Elemente beider

Büschel einander derart projectivisch zu, dass jene zwei Hyperboloide beider Büschel, welche $\Delta$ enthalten, sich entsprechen; so ist der geometrische Ort von $C^2$ die Fläche $F^4$ etc."

Art. 8. Eine algebraische Fläche n-ter Ordnung $f^n$ schneidet $F^4$ in einer Raumcurve vier n-ter Ordnung, welche $3n$ auf $\Delta$ und $D$ gelegene Doppelpunkte besitzt. Die Tangenten $t_1$, $t_2$ in einem solchen sind die Schnittlinien der Tangentialebene $T$ von $f^n$ mit den zwei Tangentenebenen $T_1$, $T_2$ der Fläche $F^4$ im bezeichneten Punkt $\alpha$. Sie coincidiren daher gleichzeitig mit $T_1$, $T_2$; woraus unter Anderem hervorgeht, dass $R^{4n}$ — falls sie durch einen Cuspidalpunkt $c$ von $F^4$ läuft — in ihm nur eine Gerade $t$ zur Tangente hat. Ist diese von der durch $c$ gehenden singulären Erzeugenden $e$ verschieden, schneidet sie also alle Trägerkegel $K^2$ in $c$; so wird auch die Curve $R$, ihrer Tangente folgend, die Tendenz haben in das Innere der $K^2$ einzudringen. Dies ist aber nicht möglich, da innerhalb aller $K^2$ kein reeller Flächenpunkt liegt; $R$ wird daher, und zwar wieder sich an $t$ schmiegend, im Punkte $c$ zurückkehren; d. h. sie wird $c$ zum Rückkehrpunkt haben. Ist hingegen $t$ mit $e$ identisch, und nur dann; so folgt auch $R$ der eingeschlagenen Richtung — sie hat in $c$ die singuläre Erzeugende zur Tangente.

„Jede (räumliche oder ebene) Curve der Regelfläche $F^4$, welche durch einen Cuspidalpunkt geht, hat diesen entweder zum Rückkehrpunkt, oder sie berührt in ihm die singuläre Erzeugende."

Dieser Satz behält seine Giltigkeit, wenn $R$ ein theilweiser Durchschnitt ist und findet eine Bestättigung in dem, von den ebenen und den Berührungscurven, Gesagten.

Da eine auf $F^4$ liegende Curve die in ihren Punkten an die Fläche gelegten Tangentenebenen berührt; gilt auch der Satz:

„Jede (ebene oder räumliche) der Regelfläche $F^4$ eingeschriebene Curve berührt die Cuspidalebenen in Punkten der singulären Erzeugenden."

Art. 9. Obwohl noch Manches über die Regelfläche $F^4$ zu sagen wäre, besonders in Betreff der ihr eingeschriebenen Raumcurven und der an ihr vorzunehmenden Constructionen, müssen wir dennoch schliessen, und zwar um so mehr, als die vorliegende

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Arbeit nur ein Auszug aus einer umfangreichen, denselben Gegenstand eingehender besprechenden Abhandlung ist, welche bereits im September des vergangenen Jahres druckbereit war, und vielleicht demnächst erscheint.

Bezüglich der erwähnten Constructionen verweisen wir auf die bereits citirte Arbeit: „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten“ und gehen nun daran, die in Art. 3 untersuchten Flächen $F_1^4$ und $F_2^4$ noch einer kurzen Besprechung zu unterziehen.

Aus der, an jener Stelle erwähnten, Eigenschaft der Fläche $F_1^4$, dass jede Ebene des Büschels $\Delta$ sie dreifach berührt, geht vor Allem hervor, dass jeder ihr umschriebene Kegel $K_4^6$ die durch seine Spitze und $\Delta$ fixirte Ebene zur dreifachen Tangentenebene hat, und dass jeder Trägerkegel $K^2$ die Doppelgerade $\Delta$ im Cuspidalpunkt $c$ berührt.

Wir finden auch, dass diese Fläche als das Erzeugniss einer Punktreihe auf $\Delta$ und eines dieser projectivischen Punktsysteme auf irgend einer ihr eingeschriebenen ebenen Curve betrachtet werden kann. Dass — die Realität ihrer drei Cuspidalpunkte vorausgesetzt — sie nur eine Curve vierter Ordnung $C_3^4$, mit drei Rückkehrpunkten besitzt, und dass sich die Ebene der drei Cuspidalpunkte mit den drei besonderen Tangentialebenen in den letzteren — den Doppelebenen — in einem Punkt schneidet.

Legen wir durch eine Erzeugende $e$ und den auf $D$ befindlichen Cuspidalpunkt $c$ von $F_2^4$ eine Ebene, so schneidet diese die Fläche in einer Curve dritter Ordnung und Classe $C_3^3$, welche $c$ zum Rückkehrpunkt und den Schnitt von $e$ mit $\Delta$, d. h. $(e\Delta)$ zum Inflexionspunkt hat. Jede Gerade $s$, welche in der Ebene der Curve durch $(e\Delta)$ läuft, schneidet diese in zwei Punkten, welche nach Art. 6 der Abhandlung: „Über rationale ebene Curven dritter und vierter Ordnung“,[1] durch $(e\Delta)$ und den Schnittpunkt von $s$ mit der Berührungsebene — eigentlich Doppelebene — von $F_2^4$ in $c$ harmonisch getrennt werden.

„Eine jede Tangentialebene, des aus dem Cuspidalpunkt $c$ der Regelfläche $F_2^4$ umschriebenen Kegels $K^2$, hat die Eigenschaft, dass eine jede Gerade derselben, welche die Doppelgerade $\Delta$ schneidet, die Fläche

[1] Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. vom 9. October 1879.

in zwei weiteren Punkten trifft, welche einander, bezüglich des erstern Punktes und des Schnittes der Geraden mit der Berührungsebene in $c$, harmonisch conjugirt sind."

Aus diesem Satz geht unter Anderem hervor, dass wenn man auf einer Erzeugenden den ihrem Schnittpunkt mit $D$, bezüglich ihrer auf $\Delta$ und der Berührungsebene in $c$ gelegenen Punkte, harmonisch conjugirten Punkt construirt, dieser die Berührungscurve, des aus $c$ der Fläche umschriebenen Kegels $K^2$, erfüllt, wenn $e$ die $F_2^4$ durchläuft.

Die Fläche $F_2^4$ hat jeden Punkt von $\Delta$ zum Inflexionspunkt und daher [nach Art. 1] den $c$ entsprechenden Doppelpunkt $d$, auf $\Delta$, zum Doppelinflexionspunkt. Dieser Punkt ist aber auch die Spitze eines Kegels $\pi^2$, welcher für $F_2^4$ die Rolle des, in Art. 6 besprochenen, Hyperboloides $\pi^2$ spielt; wie aus der, an l. c. und zwar im dritten Satz ausgesprochenen, Eigenschaft dieses Hyperboloides und aus der Bemerkung hervorgeht, dass jede Ebene des Büschels $\Delta$ die Fläche $F_2^4$ in zwei Erzeugenden schneidet, deren Schnitte mit $\Delta$ durch $d$ und $B \equiv (\Delta_1 D)$ harmonisch getrennt werden. Jede Ebene des Büschels $\overline{d\Omega}$, welches die Verbindungslinie von $d$ mit dem Schnittpunkt der Tangenten von $D$ in den Cuspidalpunkten $B$ und $c$, zur Axe hat, schneidet daher $F_2^4$ in einer Curve $C_6^4$, welche auf $D$ einen Doppelinflexionspunkt hat [s. Satz 4 in Art. 6]; nach Obigem hat $C_6^4$ aber auch in $d$ einen solchen Punkt und demnach [s. Art. 4 des Aufsatzes: „Über rationale ebene Curven, deren Doppelpunktstangenten in Inflexionstangenten übergehen", Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Märzheft 1879] sämmtliche Doppelpunktstangenten zu Inflexionstangenten.

„Die Regelfläche $F_2^4$, mit einer Inflexions-Doppelgeraden $\Delta$, enthält ein Büschel von ebenen Curven vierter Ordnung, deren sechs Doppelpunktstangenten Inflexionstangenten sind."

Die Inflexions-, beziehungsweise Haupttangenten dieser Fläche in Punkten des Doppelkegelschnittes erfüllen, wie sich leicht zeigen lässt, eine Regelfläche fünften Grades, welche $\Delta$ und $D$ zu Doppellinien hat, etc.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Aus obigem Satz und l. c. geht weiter hervor, dass jede Ebene des Büschels $d\Omega$ den Doppelkegelschnitt in zwei Punkten trifft, welche mit $\alpha$ ein Dreieck bilden, das sich, bezüglich aller Kegel $K^2$, selbst conjugirt ist; und in Verbindung mit dem, im Art. 1 der oben genannten Abhandlung, Erwähnten, ist auch klar, dass jede Gerade des Bündels $\alpha$ die Fläche $F_2^4$ in zwei weiteren Punkten schneidet, welche durch $d$ und die Ebene des Doppelkegelschnittes harmonisch getrennt werden, dass also diese die, auf $F_2^4$ bezogene Polarebene des Doppel-Inflexionspunktes ist.

Eine weit allgemeinere Fläche dieser Eigenschaften besprechen wir in einem folgenden Aufsatz.

---

## Bemerkungen über ebene Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

Schneiden wir die allgemeine Regelfläche $F^4$ durch eine Ebene $E$, von möglichst allgemeiner Lage, so erhalten wir eine allgemeine ebene Curve vierter Ordnung $C_6^4$, mit drei Doppelpunkten $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ zum Schnitt. Diese hat die in der Involutionsebene $\varepsilon_i$ befindliche Gerade $\delta_1\delta_2$ zur einen Seite des Doppelpunktsdreieckes $\Delta\delta\delta_1\delta_2$, und den Schnitt $P$, ihrer Ebene mit der auf irgend einen Kegel $K^2$ bezogenen, Polare $\overline{P'P''} \equiv p$ von $\varepsilon_i$ zum Pol dieser Seite, und zwar bezüglich des Schnittes $c^2$, ihrer Ebene mit $K^2$, welcher irgend ein sie vierfach berührender Kegelschnitt ist. Nimmt $K^2$ nach und nach alle möglichen Lagen ein, so wird auch $C^2$ die unendliche Reihe der $C_6^4$ viermal berührenden Kegelschnitte durchlaufen, die Gerade $p$ wird [s. Satz 1 im Art. 6] das Hyperboloid $\pi^2$ beschreiben, und daher $P$ den Schnitt desselben mit der Ebene $E$. Dieses ist also ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$, welcher durch $\delta$, $\delta_1$, $\delta_2$ und auch die Schnitte $b_1$, $b_2$, von $E$ mit $e_1$ und $e_2$, geht, welche auch, für $C_6^4$, als die Berührungspunkte der aus $\delta$ an $C_6^4$ gelegten zwei Tangenten definirt werden können.

„Der geometrische Ort der Pole, einer Seite des Doppelpunktsdreieckes einer ebenen Curve vierter Ordnung, bezüglich der sie vierfach berührenden

Kegelschnitte, ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$, welcher die Berührungspunkte der zwei aus dem dritten Doppelpunkt an die Curve gezogenen Tangenten enthält, und dem Doppelpunktsdreieck umschrieben ist."

Dieser Satz lässt sich auch direct nachweisen, und zwar mit Hilfe der ersten Artikel [insbesondere des Art. 4] der Abhandlung: „Über Curven $C_6^4$ mit drei Doppelpunkten." Wir ziehen, zu dem Ende, durch $b_1$ eine beliebige Gerade $d_1 d$, und betrachten sie — ihr den Strahl $\overline{\delta b_1}$ im Büschel $\delta$ zuweisend — als ein Doppelelement der erzeugenden Tangenteninvolution $i^2$ auf dem erst zu bestimmenden Kegelschnitt $c^2$. Dieser berührt daher $d_1$ in ihrem Schnitt $\beta_1$ mit $\overline{\delta_1 \delta_2}$, welcher Punkt, als der dem Schnitt $\alpha_1$, von $\overline{\delta b_1}$ mit $\overline{\delta_1 \delta_2}$, entsprechende in Verbindung mit $\delta_1$ und $\delta_2$ die Projectivität der Constructionsreihen und daher auch $c^2$ bestimmt. Die Tangente $d_2$, dieses Kegelschnittes in seinem zweiten Schnitt $\beta_2$ mit $\overline{\delta_1 \delta_2}$, geht immer durch $b_2$ — man möge $\beta_1$ beliebig annehmen — und schneidet $d_1$ in dem Punkt $P$, dem auf $C^2$ bezogenen Pol von $\overline{\delta_1 \delta_2}$; dessen geometrischer Ort, da die Beziehung zwischen $d_1$ und $c^2$ und daher auch zwischen $d_1$ und $d_2$ — wie gezeigt — eine projectivische ist, als das Erzeugniss der Büschel $b_1 (d_1)$ und $b_2 (d_2)$ ein Kegelschnitt $\mathfrak{p}^2$ ist. Da eine Curve $C_6^4$ in einem bestimmten Punkte von einem, sie auch an drei andern Stellen berührenden, Kegelschnitt $C^2$ berührt wird, und dasselbe von einem Kegel $K^2$ und der Fläche $F^4$ gilt [s. Schluss des Art. 5 dieser Abhandlung]; sehen wir, dass jedem vierfach berührenden Kegelschnitt von $C_6^4$ ein Kegel $K^2$, und umgekehet jedem $K^2$ ein $C^2$ zugeordnet ist, so zwar, dass $C^2$ der Schnitt von $K^2$, und $K^2$ der Schein von $C^2$ ist.

Aus c. l. sehen wir auch, dass sich die vierfach berührenden Kegelschnitte einer Curve $C_6^4$ zu Paaren gruppiren, welche sich in einem Punkt schneiden; und für einen ebenen Schnitt von $F^4$ auf den zwei, durch ihren Schnittpunkt bestimmten, Trägerkegeln liegen.